996. locally bicompactly bounded ナ空間ニツイテ(II)

寺阪　英孝 (阪大)

§5. 空間ノ積ト和

(K^n) 及ビ (LK^n) ノ實例ヲアゲルツモリト約束シテ置キマシタガ、証明ガウマク行カナイノデ，取敢ヘズ問題ニシテオキマス．コノ外ニモ成ルタケ具体的ナ問題ヲ先ヅ出シテオキマスカラ智慧ヲオ貸シ下サイ。

サテ §3 ノ例ヲ一般ニシテ

$\boxed{\text{問}2}$ $\{r\}$ ヲ有理數 r ノ全体又ハ $r=\frac{1}{n}$ ($n=1, 2, -----$) ノ全体トスル．サウスルト座標 ($x_1, x_2, \cdots x_n$) ナル Euclid 空間 R^n カラ $x_1=r$, $r\in\{r\}$ ナル超平面ヲ除イタ残ハ (K^n) 空間デアル。

$\boxed{\text{問}3}$ Euclid 空間 R^n カラ半超平面 $x_n=0$, $x_1>0$ ヲ除イタ残リハ (LK^n) 空間デアル。

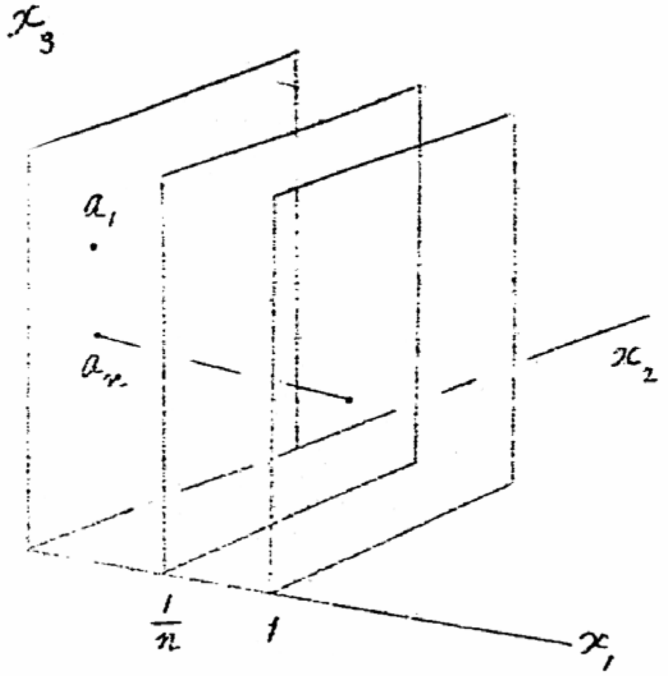
イヅレモ R^n ノ部分空間故，定理2ニヨッテ，少クモ (K^n) 及ビ (LK^n) ヲ云ヘバヨイノデアル．モ少シ欲ヲ出シテ

$\boxed{\text{問}4}$ R^n ノ部分空間デ (K^m) 又ハ (LK^m) ナルモノノ特性如何。

ヲ決定シタラ面白イ訳デアルガ，コレニツイテハ次ノ例ヲ参考ニ供シマス。

$\boxed{\text{例}5}$ R^3 カラ $x_1=\frac{1}{n}$ ($n=1, 2, -----$) ナル平

面ヲ除ケバ(K³)ニナルガ，モシ更ニ($x_2 x_3$)平面内ノ凡テノ有理点$\{a_n\}$カラx_1軸ノ正ノ方向ニ平行ニヒイタ直線ヲ除ケバ，(K²)ガ得ラレル。

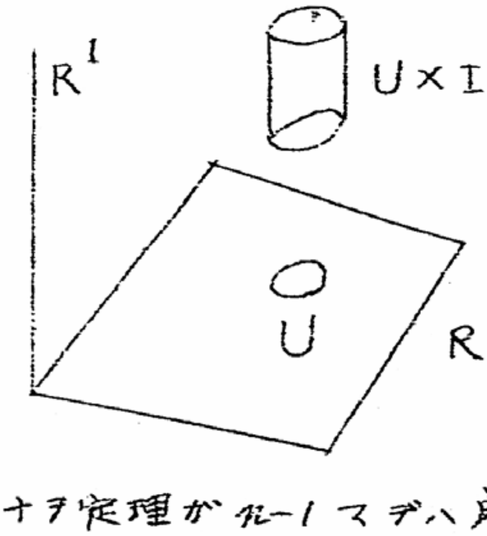


即チ局部連結性ナドガ大イニ関聯シテ来ル。

モ一ツ問2ニツイテ考ヘラレルノハ前ニモ一寸述ベタ。

$\boxed{\text{問5}}$ (K^n)空間ト直線R'トノ積空間ハ(K^{n+1})デハナカラウカ。

ト云フノデアルガ，コレヲ素朴ナ方針デ証明シヨウトスルト先ヅ次ノヤウナコトガ考ヘラレル。即チRヲ與ヘラレタ(K^n)空間トシ，Uヲソノ近傍，IヲR^1ノ*interval*トシ，$R\times R^1$ノ近傍トシテ$U\times I$ヲトレバ，$R\times R^1$ガ(K^{n+1})ナルコトヲ云フニハ，$U\times I$ノ境界ガ(K^n)ナルモノガ任意ニ小サクトレルコトヲ示セバヨイ。

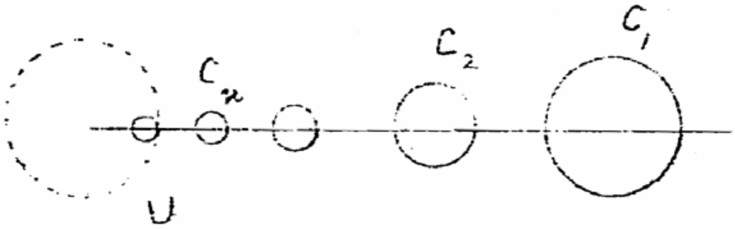


ナヲ定理ガ$n-1$マデハ成立シテヰルモノト假定シ，Uトシテ$\dot{U}$ガ(K^{n-1})ナルモノ

ヲ考ヘレバ，$\dot{U}\times I$ ハコノ假定ニヨリ（K^n），從ツテ $U\times I$ ノ境界ハ閉ヂタ（K^n）ノ和（即チ $U\times\bar{I}$ ト $\bar{U}$ ニ個ノ和）ニナルカラ，モシ〔閉ヂタ（K^n）空間*ノ和ハ矢張リ（K^n）空間デアル〕コトガ正シケレバ，ヨイ訳デアル．所ガ實ハコレガ成立タナイノデアッテ次ノ實例ガアル。

$\boxed{\text{参考定理 I}}$ 二ツノ閉ヂタ（$\dot{K}$）空間*デ和ガ（$L\dot{K}$）トルモノガ存在スル。

何者、先ヅ（$L\dot{K}$）空間トシテ例4，即チ平面カラ x 軸ノ正部分ヲ除イタ残 R ヲトル。コレヲ二ツノ閉ヂタ（$\dot{K}$）空間ニ分ツタメ、x 軸ノ正部分ニ中心ヲモチ、原点ニ收斂スル互ニ素ナ円盤 $C_1, C_2, \cdots\cdots$ ヲ考ヘル。



ソウスルト

$$R\cdot\overline{\sum C_n}=A$$

ハ原点ヲ含ミ，ココデハ（$\dot{K}$），他ノ A 点デハ（LK）ヨリテ A ハ（$\dot{K}$）空間デアル．又

$$R-\sum C_n=B$$

ハ矢張リ原点以外デハ（LK），原点デハ図ノ如キ近傍 U ヲトレバ $\dot{U}$ ハ（K）ナル故，B ハ（$\dot{K}$）デアル．

即チ　　$R=A+B$

ノ如ク（$L\dot{K}$）ガ二ツノ閉ヂタ（K）ニ分タレタ。

---

*閉ヂタ空間云々ト云フノハ，和空間ノ中デ閉ヂテヰルトイフ意味.

コノ例ニヨッテ加法定理ガ成立シナイコトガ分ッタ、従ッテ積定理モ素朴ナ方法デハ証明ガムヅカシイコトニナラウ。

サテ参考定理カラ思付クコトハ

$\boxed{\text{定理4}}$ 開ダタ(K^n)ニ開ダタ$(\dot{K})$ヲ加ヘレバ高々(K^{n+1})ニナル。

コレハ容易デアッテ，(K^n)空間ヲA，$(\dot{K})$空間ヲBトスレバ，ABニ含マレル点aガA+B内デ高々(K^{n+1})ヲ云ヘバヨロシイ．先ヅ$a \in B$故，$U \ni a$ヲ適当ニトッテ$\dot{U}B$ガ(K)ノヨウニ出来ル、コノUニツイテ$\dot{U} \cdot A$ヲ考ヘルト，コレハ開集合故定理3ニヨッテ高々(K^n)デアル．従ッテ

$$\dot{U} = \dot{U}A + \dot{U}B$$

ハ高々(K^n)ナ開ダタ空間ト(K)トノ和ニナル故

$\boxed{\text{定理5}}$ 開ダタ(K^n)又ハ(LK^n)ト(K)トノ和ハ夫々(K^n)又ハ(LK^n)デアル。

コトニ注意スレバ$\dot{U}$ハ高々(K^n)デアリ，従ッテaハA+Bニ於テ高々(K^{n+1})デアル。

コヽニ定理5ハ帰納法ニヨッテ簡単ニ証明出来ル但シ開ダテキルコトハ必要ナノデ，例ヘバ直線R^1カラ$x=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$及ビ原点ヲ除イタ空間ハ(LK)然ルニコレニ原点（即チ(K)）一ツヲ加ヘレバ$(\dot{K})$ニナッテ了フ。

所デ定理4ハモ少シヨクナリハシマイカ．即チ

$\boxed{\text{問6}}$ 閉ヂタ(K^n)ニ閉ヂタ(K)ヲ加ヘレバ高々(LK^n)ニナルノデハアルマイカ。閉ヂタ(LK^n)ニ閉ヂタ$(\dot{K})$ヲ加ヘテモ矢張リ(LK^n)デハアルマイカ。一般ニ(LK^n)ニ関シテ加法定理ガ成立ツノデハアルマイカ。

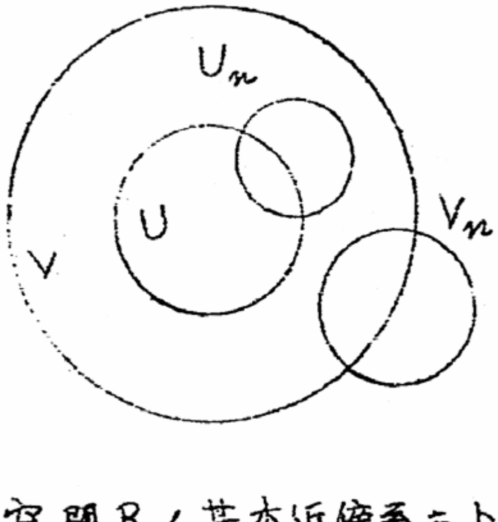
ナド考ヘラレル。

コンナニ想像許シテキテ証明ヲ実行シナイノモ気ガヒケマスノデ，次ノ小サナ定理ヲ証明シテミマス。

$\boxed{\text{定理6}}$ 正則可分ナ$(\dot{K})$又ハ$(L\dot{K})$空間ハ一点ヲ附加スルコトニヨツテ高々$(L\dot{K})$ニナル。

コレハ次ノ定理カラ導ケル。

$\boxed{\text{定理7}}$ 正則可分ナ高々$(L\dot{K})$ナ空間内ノ任意ノ$U \Subset V$ $(\overline{U} \subset V$ ノコト$)$ナル開集合U, Vニ対シ，$U \subset U^* \subset V$デアッテ且ツ$\dot{U}^*$ガ高々(LK)ナル開集合U^*ガ存在スル。



(証) 考ヘテキル空間ヲRトスル。Rハ高々$(L\dot{K})$故，各点$x \in R$ニハ境界$\dot{U}(x)$ガ高々(LK)ナル任意ニ小ナ近傍$U(x)$ガ存在スル可分ノ仮定カラ，カヽルモノ可附番個ヲ空間Rノ基本近傍系ニトルコトガ出来ル。ヨツテソノ中，Uト交ハリ且ツ$\Subset V$ナルモノヲ$U_1, U_2, \cdots\cdots$トシ，又Uト全ク離レテキルモノ(閉包同志モ素ナルモノ)ヲ$V_1, V_2, \cdots\cdots$トシテ

$$U = U_1 + (U_2 - \bar V_1) + (U_3 - \bar V_1 - \bar V_2) + \cdots\cdots$$

ヲ造レバ, U^*ガ求ムルモノナルコトガ分ル. 何者、先ヅ

$$U \subset U^* \subset V$$

ハ明. 次ニ $\dot U^*$ ガ高々(LK)ナルコトヲ示スタメニ, $\dot U^*$ 任意ノ点xヲ考ヘル.

(i) $x \in U_n$ ナラバ $U_n \cdot U^*$ ヲ計算スルト

$$U_n \cdot U^* = U_n \cdot U_1 + \cdots\cdots + U_n \cdot (U_n - \bar V_1 - \bar V_2 - \cdots\cdots - \bar V_{n-1})$$

ニナル. ソレ故 $U_n \cdot \dot U^*$ ハ U_1 カラ U_n マデ及ビ V_1 カラ V_{n-1} マデノ境界ノミガ関聯スルカラ高々(LK)ニナル.

(ii) $x \in V_n$ ナラバ

$$V_n \cdot U^* = V_n \cdot U_1 + \cdots + V_n (U_{n-1} - \bar V_1 - \cdots\cdots - \bar V_{n-1})$$

トナッテ同様デアル。

ヨッテ $\dot U^*$ ハ高々(LK)デアル。

$\boxed{\text{系}}$ ($\ddot K$)空間デハ($\ddot K$)点ハ孤立シテ居ラヌ。

($\ddot K$)点デドノヤウニ分布シテヰルカハムヅカシイ問題カモ知レナイ. 類推ニヨリ Menger ノ Dimensionstheorie p.139 以下ニアル äusserst schwach eindimensional ナ空間 (Sierpinski: Fund. Math. 2 ノモノ)ヲ調ベテミルトコレハ(L$\dot K$)ナノデコノママデハ役ニ立タナカッタ。